Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a XII-a

Varianta 2 — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia $\max_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1$, şi fie $I\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$,

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(0) + f(1).$$

(a) Arătaţi că $I(f) < 3$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}$.
(b) Determinaţi $\sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$.

Soluţie. **(a)** Fie f o funcţie din $\mathcal{F}$. Din condiţia $\max_{0\le x\le 1}|f(x)| = 1$, rezultă că $I(f) \le \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + 1 + 1 = 3$ .... **2 puncte**

Inegalitatea este strictă, în caz contrar, $f(x) = 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, şi $f(0) = -1$, contradicţie .... **1 punct**

(b) Pentru $n \ge 2$, funcţia $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx - 1, & 0 \le x \le 1/n, \\ 1, & 1/n < x \le 1, \end{cases}$$

este un element din $\mathcal{F}$. .... **2 puncte**

Pentru această funcţie,

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x - f_n(0) + f_n(1) = \int_0^{1/n} (2nx-1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 1\,\mathrm{d}x + 1 + 1 \\ &= (nx^2 - x)\Big|_0^{1/n} + 3 - 1/n = 3 - 1/n. \end{aligned}$$

.... **1 punct**

Prin urmare, $3 - 1/n \le \sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{F}\} \le 3$, oricare ar fi $n \ge 2$, deci supremumul cerut este 3. .... **1 punct**

Problema 2. Fie p un număr natural mai mare sau egal cu 2 şi fie $(M, \cdot)$ un monoid finit, astfel încât $a^p \ne a$, oricare ar fi $a \in M \setminus \{e\}$, unde e este elementul neutru al lui M. Arătaţi că $(M, \cdot)$ este grup.

Soluţie. Fie $a \in M \setminus \{e\}$. Cum M este finit, există două numere naturale nenule i şi k, astfel încât $a^i = a^{i+k}$. .... **1 punct**

Prin înmulţiri succesive cu a^k, rezultă că $a^i = a^{i+nk}$, oricare ar fi numărul natural nenul n. .... **1 punct**

Alegem un număr natural m, astfel încât $mk > i$. Prin inmulţirea relatiei anterioare cu a^{mk-i}, obţinem $a^{mk} = a^{2mk}$. .... **3 puncte**

Fie $b = a^{mk}$. Atunci $b = b^2$ şi, prin eventuale înmulţiri succesive cu b, obţinem $b = b^p$. .... **1 punct**

Rezultă că $b = e$, i.e., $a^{mk} = e$. Cum $mk \geq 2$, obţinem $a^{mk-1} \cdot a = a \cdot a^{mk-1} = e$, deci a este inversabil şi, prin urmare, $(M, \cdot)$ este grup. .... **1 punct**

Problema 3. Arătaţi că o funcţie continuă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este crescătoare dacă şi numai dacă

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numerele reale $a < b < c$.

Soluţie. Dacă f este crescătoare şi $a < b < c$, atunci

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (c-b)(b-a)f(b) = (b-a)(c-b)f(b) \leq (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

.... **3 puncte**

Reciproc, fie a şi b două numere reale, astfel încât $a < b$, şi fie $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Dacă x şi y sunt numere reale, astfel încât $a < x < y < b$, din relaţia din enunţ rezultă că

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq \frac{F(b)-F(y)}{b-y}.$$

.... **2 puncte**

Cum F este derivabilă şi $F' = f$, obţinem

$$f(a) = F'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} \leq \lim_{y \nearrow b} \frac{F(b)-F(y)}{b-y} = F'(b) = f(b).$$

.... **2 puncte**

Remarcă. Implicaţia directă nu necesită continuitatea lui f, deoarece monotonia funcţiei implică integrabilitatea pe orice interval compact.

Implicaţia reciprocă nu necesită nici ea continuitatea lui f, ci doar existenţa primitivelor pe $\mathbb{R}$.

În cazul în care f este continuă, implicaţia directă mai poate fi demonstrată după cum urmează: conform teoremei de medie, există $\alpha \in (a,b)$ şi $\beta \in (b,c)$, astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\alpha) \quad \text{şi} \quad \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = (c-b)f(\beta).$$

Cum $\alpha < \beta$, rezultă $f(\alpha) \leq f(\beta)$, deci

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (c-b)(b-a)f(\alpha) \leq (b-a)(c-b)f(\beta) = (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 4. Fie n şi q două numere naturale, $n \geq 2$, $q \geq 2$ şi $q \not\equiv 1 \pmod 4$, şi fie K un corp finit care are exact q elemente. Arătaţi că, oricare ar fi elementul a din K, există x şi y în K, astfel încât $a = x^{2^n} + y^{2^n}$. (Orice corp finit este comutativ.)

Soluţie. Fie p caracteristica lui K. Atunci p este prim şi $q = p^\alpha$, unde α este un număr natural nenul. Cum $q \not\equiv 1 \pmod 4$, rezultă că şi $p \not\equiv 1 \pmod 4$, deci $p = 2$ sau $p \equiv 3 \pmod 4$ şi, în acest caz, α este impar. .... **1 punct**

Dacă $p = 2$, iar x şi y sunt elemente ale lui K, astfel încât $x^{2^n} = y^{2^n}$, atunci $x = y = 0$ sau, în cazul în care $y \neq 0$, $(xy^{-1})^{2^n} = 1$. Cum $(xy^{-1})^{2^\alpha - 1} = (xy^{-1})^{q-1} = 1$, obţinem $xy^{-1} = 1$, deci $x = y$. Prin urmare, funcţia $f\colon K \to K$, $f(x) = x^{2^n}$, este injectivă, deci surjectivă. Dacă a este un element oarecare din K, atunci există un element x în K, astfel încât $a = f(x)$, deci $a = x^{2^n} + 0^{2^n}$. .... **2 puncte**

Dacă $p \equiv 3 \pmod 4$ şi α este impar, atunci şi $q \equiv 3 \pmod 4$, i.e., $q = 4k + 3$, unde k este un număr natural. Fie $g\colon K^* \to K^*$, $g(x) = x^{2^n}$, şi fie x şi y două elemente din K^*, astfel încât $g(x) = g(y)$. Atunci $(xy^{-1})^{2^n} = 1$ şi cum $(xy^{-1})^{4k+2} = (xy^{-1})^{q-1} = 1$, iar $(2^n, 4k+2) = 2$, rezultă $(xy^{-1})^2 = 1$, deci $xy^{-1} = \pm 1$, i.e., $y = \pm x$. .... **1 punct**

Cum p este impar, rezultă că $1 \neq -1$, deci imaginea funcţiei g are exact $(q-1)/2$ elemente. .... **1 punct**

Fie $K_n = \{x^{2^n} | x \in K\} = \{0\} \cup \operatorname{Im} g$. Evident, $|K_n| = 1 + (q-1)/2 = (q+1)/2$. Dacă a este un element oarecare al lui K, atunci $|K_n| = |a - K_n| = (q+1)/2$, deci cele două mulţimi, K_n şi $a - K_n$, nu sunt disjuncte. Prin urmare, există u şi v în K_n, astfel încât $u = a - v$. Cum $u = x^{2^n}$ şi $v = y^{2^n}$, unde x şi y sunt elemente din K, obţinem $a = x^{2^n} + y^{2^n}$. .... **2 puncte**